L'insegnamento della Matematica
e delle Scienze Integrate Vol. 6 – N. 6 – Dicembre 1983

INDICE

NELLA SCUOLA

Spunti didattici

Carlo Felice MANARA

Raffaella TARDINI Manara

3° PARTE

****

9. *Abbiamo finora utilizzato la espressione '**valore approssimato**' di un numero ed altre espressioni equivalenti, fidando nella comprensione che è fornita dall'uso che si fa di queste espressioni nel linguaggio comune.*

Vogliamo ora trattare più davvicino il problema della approssimazione, e soprattutto le questioni riguardanti i calcoli approssimati,perchè spesso su questo argomento si sorvola nelle trattazioni abituali,e spesso si rischia di cadere nei due errori in un certo modo opposti,di cui abbiamo detto; errori che consistono nello spreco di informazioni spesso costose, e nella illusione di dare come risultati di calcoli delle informazioni che invece risultano false e fantasiose.

Per precisare ciò che intendiamo esporre, citiamo qui ciò che scrive U.Cassina (1,i) :

"Dare una quantità numerica **x** per approssimazione significa dare due quan-

"tità **a** e **b** tali che sia :

$$a < x < b \qquad (\$)$$

"Così Archimede disse che

$$3 + 1/7 > \pi > 3 + 10/71$$

"e quindi determinò π per approssimazione.

"I numeri che soddisfano alla condizione ($) formano l'intervallo da a a b

"Ne risulta che il calcolo sui numeri dati per approssimazione può ricondursi

"al calcolo sugli intervalli numerici.

"Ora i numeri irrazionali e quelli determinati sperimentalmente non possono

"essere dati che per approssimazione ; quindi imparando ad operare sugli inter-

"valli , noi saremo in grado di eseguire anche qualunque operazione sui nume-

ri irrazionali e su quelli dati dalle esperienze".

Vorremmo osservare che l'impiego delle macchinette costringe ad utilizzare quasi sempre dei numeri approssimati, perchè anche i numeri razionali sono rappresentati in forma decimale ; e si sa che un numero razionale, dato da una frazione che - ridotta ai minimi termini - abbia un denominatore che contiene dei fattori diversi da 2 e da 5, viene rappresentato in forma decimale da un numero periodico; il che significa che la rappresentazione in forma decimale di un numero cosiffatto comporta in ogni caso degli errori, perchè il numero di cifre che una macchina qualesivoglia (ed a maggior ragione una macchinetta) può mostrare nel visore è sempre e soltanto finito; inoltre il periodo della rappresentazione decimale del numero può essere formato da tante cifre da rendere praticamente impossibile il risalire alla frazione generatrice, quando si voglia utilizzare questa forma di rappresentazione : si pensi ad esempio al numero 10/47 il cui periodo,come si è visto al && 5, è formato da 46 cifre.

Si pone quindi il problema di imparare ad operare con i numeri decimali approssimati, in modo da evitare gli errori di cui abbiamo detto.

Vale la pena di ricordare anzitutto che, anche nel presentare i valori decimali approssimati, sono in uso diverse convenzioni, tanto per le tavole numeriche, quanto per le macchinette. Riferiamoci per esempio al calcolo che abbiamo eseguito nel &&7,dove abbiamo trovato

$$5{,}47722557 < \sqrt{30} < 5{,}47722558$$

Volendo dare un valore approssimato con due sole cifre dopo la virgola, si può convenire di prendere il numero decimale **5,47**, *oppure il numero decimale* **5,48**.

*Nel primo caso diremo che adottiamo un valore "***troncato***" o anche "***abbreviato***" (secondo la nomenclatura introdotta da G.Peano in (3,i)); nel secondo caso diremo che adottiamo un valore "***arrotondato***".*

Più precisamente diremo che un numero decimale è un <u>*valore arrotondato con* **r** *cifre dopo la virgola*</u> *se è stato costruito trascurando le cifre dopo la r-esima, e lasciando l'ultima cifra come è se la prima trascurata è minore di 5, aumentando l'ultima cifra scritta di una unità se la prima cifra trascurata è 5 o maggiore di 5.*

Molto spesso anche le tavole numeriche adottano queste convenzioni; e nelle edizioni più precise vi sono dei segni convenzionali per indicare se il numero decimale che si presenta è un valore abbreviato oppure arrotondato; per esempio alcuni editori di tavole stampano l'ultima cifra in grassetto o segnano altre indicazioni convenzionali nel caso in cui la ultima cifra stampata sia stata aumentata di una unità, secondo le convenzioni dell'arrotondamento.

G.Peano ha osservato acutamente che queste convenzioni equivalgono alla scelta di una notazione in base 2 aggiunta all'ultima cifra.Quando non esistano di queste convenzioni, il calcolare con valori arrotondati porta come conseguenza la impossibilità di determinare il segno dell'errore che si commette assumendo il numero decimale come valore del numero che si vuole rappresentare. Ciò avviene anche con le macchinette, alcune delle quali presentano i risultati dei calcoli con valori troncati, ed altre con valori arrotondati.

Per poter scoprire quali sono le convenzioni adottate dalla macchinetta che si adopera, si può per esempio eseguire il calcolo della frazione generatrice di un numero il cui periodo è di due cifre, la seconda essendo maggiore o uguale a 5. Eseguiamo per esempio la la operazione

$$85 : 99$$

alcune macchinette danno il valore

$$0{,}85858585$$

altre danno il valore

$$0{,}85858586.$$

Ovviamente questo secondo valore è arrotondato, secondo le convenzioni che abbiamo esposto.

Analogo risultato si ottiene eseguendo la operazione che porta a calcolare ad esempio

$$79 : 99 .$$

Nel seguito noi converremo di operare sempre con valori abbreviati, oppure con intervalli i cui estremi sono esplicitamente scritti.
E' possibile tuttavia risparmiare simboli : precisamente scrivendo per esempio

$$\sqrt{3} = 1{,}732... \tag{1}$$

intenderemo che il numero a destra è un valore troncato dell'irrazionale $\sqrt{3}$; pertanto la scrittura (1) sta al posto della coppia di disuguaglianze:

$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 \tag{2}$$

Vorremmo osservare di passaggio che ben raramente nei manuali della scuola secondaria si trovano delle convenzioni per informare sul fatto che i decimali che si presentano sono dei valori (abbreviati o arrotondati ma comunque) approssimati dei numeri reali che si trattano; per esempio, nella pratica comune, il numero π viene identificato con il razionale **3,14** e l'altezza del triangolo equilatero di lato unitario viene identificata con il razionale **0,86** ; con quale vantaggio per la chiarezza e la precisione lasciamo immaginare al lettore.

Consideriamo ora due numeri reali, che chiameremo α e β e che supporremo positivi. Ovviamente questi possono essere assegnati mediante due intervalli, cioè nella pratica è solo possibile scrivere:

$$(3) \qquad \begin{cases} A < \alpha < A' \\ B < \beta < B' \end{cases}$$

dove **A,A'** e **B,B'** sono numeri razionali positivi o nulli, in particolare dei numeri decimali finiti.

E' noto che dalle (3) si trae

$$(4) \qquad \begin{cases} A + B < \alpha + \beta < A' + B' \\ AB < \alpha\beta < A'B' \end{cases}$$

ed in particolare

$$(5) \qquad A^2 < \alpha^2 < A'^2$$

Inoltre, per $B > 0$ si ha

$$(6) \qquad A/B' < \alpha/\beta < A'/B$$

e, per $A \geqslant B' \geqslant 0$ si ha anche

$$(7) \qquad A-B' < \alpha-\beta < A'-B \; .$$

Queste relazioni sono ben note, ma vengono talvolta dimenticate quando si calcola con numeri che traducono delle misure ottenute sperimentalmente, il che può portare a conseguenze un po' curiose.

Per spiegare meglio ciò che intendiamo dire, pensiamo ad un problema di geometria pratica, che consiste nel dare la lunghezza della ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono lunghi rispettivamente **23,7..** *cm e* **37,4..** *cm. Le informazioni precedenti possono essere tradotte in diseguaglianze che determinano gli intervalli in cui sono compresi i due numeri* **a** *e* **b** *che danno le lunghezze vere dei cateti: si ha quindi*

$$(8) \qquad \begin{cases} 23{,}7 < a < 23{,}8 \\ \\ 37{,}4 < b < 37{,}5 \, . \end{cases}$$

Quindi per il quadrato c^2 *della ipotenusa, a norma della* **(5)**, *si hanno le relazioni*

$$(9) \qquad 1960{,}45 < c^2 < 1972{,}69 \; .$$

Operando con una macchinetta che eseguisca anche la radice quadrata si avrà quindi

$$(10) \qquad 44{,}27.. < c < 44{,}42 \; .$$

Queste sono ovviamente le sole informazioni che si possono dare sulla lunghezza della ipotenusa, a partire dalle informazioni **(8)**; *come si vede, l'ipotenusa può essere data al massimo con un errore che è dello ordine di* **0,2** *cm .Ogni altra informazione, che qualcuno sarebbe tentato di dare osservando il numero di cifre fornite dalla macchinetta, è fantasiosa e quindi falsa.*

Considerazioni analoghe si possono fare quando si tratta di trovare un cateto di un triangolo rettangolo, dati che siano l'altro cateto e l'ipotenusa, quando le loro misure siano approssimate. Per esempio, mantendo le notazioni già introdotte,sia

$$(11) \qquad \begin{cases} 18{,}3 < c < 18{,}4 \\ \\ 13{,}7 < a < 13{,}8 \, . \end{cases}$$

Tenendo conto delle **(5)** *si ha :*

$$(12)\quad \begin{cases} c_1 = 334{,}89 < c^2 < 338{,}56 = c_2 \\ a_1 = 187{,}69 < a^2 < 190{,}44 = a_2 \end{cases}$$

Tenendo conto della (7) si ha ora:

$$(13)\quad c_1 - a_2 = 144{,}45 < c^2 - a^2 < 150{,}87 = c_2 - a_1$$

e di qui

$$(14)\quad 12{,}01 < b = \sqrt{c^2 - a^2} < 12{,}29$$

Anche in questo caso queste sono le sole informazioni che possiamo trarre dai dati, dopo i calcoli; ogni altra informazione che volesse essere più precisa, per esempio presentando altre cifre dopo la virgola della misura richiesta, è ovviamente falsa.

<u>10-</u> Le considerazioni svolte nel && precedente potrebbero portare facilmente alla conclusione seguente; quando si parte, in un problema concreto, con determinati errori, è vano sperare che la elaborazione matematica dei dati porti a dei risultati con degli errori minori. Conclusione che è del tutto ovvia ma, come abbiamo detto, talvolta dimenticata da chi fornisce come risultati di calcoli delle informazioni fantasiose che non hanno molto senso.

Risulta pertanto interessante conoscere dei metodi che permettano di valutare gli errori dei risultati di determinati calcoli, quando si conoscano gli errori di cui sono affetti i dati di partenza.

Esporremo qui delle convenzioni del tutto elementari, che sono state adottate da Peano e dalla sua scuola -cfr.(1) e (2)- allo scopo di cui dicevamo poco fa .

Indichiamo con Θ (theta) la classe dei reali compresi tra zero ed uno. Si avrà quindi

$$(1)\quad 0 < \Theta < 1$$

Conveniamo di adottare per questo simbolo le seguenti leggi di calcolo:

$$(2) \qquad \Theta + \Theta = 2\,\Theta$$

$$(3) \qquad \Theta + \Theta + \Theta + \ldots \Theta = n\Theta$$

(n volte)

$$(4) \qquad \Theta \times \Theta = \Theta$$

$$(5) \qquad -1 + \Theta = -\Theta$$

e quindi in particolare

$$(6) \qquad \Theta - \Theta = -1 + 2\Theta \,.$$

Il simbolo

$$\Theta a$$

*a essendo un numero reale,può essere letto "**frazione di a**" o con altre espressioni aventi lo stesso senso; quindi in particolare il simbolo*

$$\Theta X^{-r}$$

*indicherà una frazione dell'unità decimale di ordine **r** .*

*Si noti in particolare che, per quanto sopra, il simbolo Θ non indica un <u>determinato</u> numero dell'intervallo **(1)**, neppure quando compare diverse volte in una medesima formula; invero se ciò fosse la **(5)** sarebbe una equazione con la sola soluzione $\Theta = 1/2$.*

*Con l'adozione di questi simboli, e convenendo di scrivere sempre soltanto valori abbreviati dei numeri che si considerano, le **(1)** e **(2)** del && precedente possono essere scritte*

$$(7) \qquad \sqrt{3} = 1{,}732 + \Theta X^{-3}$$

*e le informazioni date dalle **(8)** del && precedente possono essere tradotte nelle formule :*

$$(8) \qquad \begin{cases} a = 23{,}7 + \Theta X^{-1} \\ \\ b = 37{,}4 + \Theta X^{-1} \end{cases}$$

e di conseguenza

$$a^2 = 561,69 + 47,41\Theta X^{-1}$$

(9)

$$b^2 = 1398,76 + 74,81\Theta X^{-1}$$

da cui infine

$$c^2 = 1960,45 + \Theta 12,23 \quad .$$

Daremo qui un esempio dell'impiego di queste notazioni, prendendo lo spunto da un problema geometrico, che ci permetterà di fare qualche ulteriore osservazione.

Sia da calcolare la lunghezza della circonferenza inscritta nel triangolo equilatero di lato unitario.

Con considerazioni elementari, si trova che il diametro di tale circonferenza vale

(10) $$d = \sqrt{3} / 3 \quad ;$$

pertanto ponendo

(11) $$D = 0,5773502 \qquad ; \quad P = 3,1415926$$

si può scrivere

(12) $$d = D + \Theta X^{-7} \qquad ; \quad \pi = P + \Theta X^{-7}$$

e quindi la lunghezza C cercata può essere data da

(13) $$C = D \cdot P + \Theta X^{-7} (D + P) \; = 1,8137991 + 4\Theta X^{-7} .$$

Pertanto l'ultima cifra a destra del numero decimale che dà C può essere **1,2,3,4** *oppure* **5**. *Eseguendo i calcoli con maggiore approssimazione si trova che tale cifra è* **3**.

Questo stesso esempio permette di constatare che cosa avverrebbe se i due fattori fossero dati con errori di diverso ordine. Supponiamo, per esempio, che - come si fa troppo spesso - si sia posto

(14) $$\pi = P' + \Theta X^{-2}$$

essendo

(15) $$P' = 3,14 .$$

Eseguendo i calcoli come prima otterremo per C l'espressione:

$$(16) \qquad C = D \cdot P' + \Theta X^{-2} \cdot D + \Theta X^{-7} P' + \Theta X^{-9} ;$$

ora è

$$(17) \qquad D \times P' = 1,8128798 ,$$

ma il secondo addendo della **(16)** *può essere scritto come* ΘX^{-3} *; pertanto nel secondo membro della* **(17)** *già la terza cifra non è certa, come mostra, del resto, il confronto con la* **(13)**. *Ne consegue che, in questo caso, le cifre dalla terza decimale in poi dopo la virgola sono illusorie e di conseguenza le informazioni che sono ottenute dalla prima delle* **(11)** *sono sprecate, ai fini del calcolo di un valore approssimato di C : invero, con la posizione* **(14)**, *ogni cifra di* **D** *dalla terza decimale in poi non ha influenza sulla approssimazione del risultato, e pertanto la* **(17)** *fornisce una falsa presunzione di precisione.*

Diamo qui di seguito un altro esempio di impiego di queste notazioni, utili per la valutazione degli errori e per risparmiare calcoli superflui e fuorvianti.

Sia A un decimale che dà un valore della radice quadrata di un intero N con errore minore di X^{-r}. *Sarà quindi:*

$$(18) \qquad (A + \Theta X^{-r})^2 = N .$$

Indichiamo con B un numero decimale che ha non più di r–1 cifre prima della virgola: si avrà quindi

$$(19) \qquad 0 \leq B < X^{r} ,$$

e poniamo

$$(20) \qquad (A + B X^{-2r})^2 = N .$$

Avremo quindi

$$(21) \qquad A^2 + 2\, A \cdot B \cdot X^{-2r} + B^2 \cdot X^{-4r} = N$$

e, dalla **(19)**

$$(22) \qquad (2AB + \Theta) X^{-2r} = N - A^2$$

e quindi

$$(23) \qquad 2\, A \cdot B = (N - A^2)\, X^{2r} - 1 + \Theta$$

ed infine

(24) $$B = \left[(N - A^2)\, X^{2r} - 1\right] /2A \;+ \Theta \;.$$

Sia per esempio:

(25) $$r = 4 \quad ; \quad N = 2$$

e prendiamo quindi

(26) $$A = 1{,}4142$$

da cui

(27) $$A^2 = 1{,}99996164 \;.$$

Si ha

(28) $$(N - A^2)X^8 - 1 = 3835$$

e quindi

(29) $$B = 1355{,}890255 \;+\; \Theta \quad ;$$

pertanto si può prendere

(30) $$\sqrt{2} = 1{,}4142135 + \Theta X^{-7} \;.$$

Possiamo applicare ulteriormente il procedimento sopra esposto, prendendo questa volta

(31) $$A = 1{,}414 \;+\; 2135\; X^{-7} \;;$$

abbiamo rappresentato il numero A con questa espressione perchè, questa volta, per il calcolo di A^2 dovremo applicare i procedimenti che abbiamo esposto nel &&4. Adottando le notazioni ivi introdotte si ottiene

(32) $$A^2 = 1 + 999\; Y^{-1} + 999\; Y^{-2} + 823\; Y^{-3} + 582\; Y^{-4} + 250\; Y^{-5}$$

proseguendo i calcoli con le tecniche indicate si ottiene in definitiva:

(33) $$\sqrt{2} = 1{,}414\;213\;562\;373\;09 + \Theta X^{-14} \;.$$

11.- Dedicheremo questo && a richiamare le proprietà di un algoritmo classico che non viene quasi mai trattato negli ordinari corsi delle scuole secondarie, e che invece può offrire degli spunti interessanti all'impiego delle macchinette: parliamo dell'algoritmo delle frazioni continue.

Non intendiamo qui esporne la teoria generale e pertanto ci limitiamo a trattare un esempio, lasciando al lettore le facili generalizzazioni.

Sia, per es., il decimale **1,23** *; esso può venire scritto nella forma* **1+0,23 = 1 + 1/4,347826...;** *a sua volta il decimale* **4,347826...** *può essere scritto nella forma*

$$4 + 0{,}347826.. = 4 + 1/2{,}875...$$

Proseguendo nella rappresentazione si ottiene:

$$(1) \qquad 1{,}23 = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}}$$

espressione che viene chiamata ***"frazione continua (discendente)"*.**

I numeri ***1,4,2,1,7*** *vengono chiamati* ***"quozienti parziali"*** *della frazione continua. Per evitare notazioni che occupano troppo spazio, si suole convenire di elencare soltanto i quozienti parziali; pertanto, invece della scrittura data dalla* ***(1)*** *si adotta la scrittura convenzionale:*

$$(2) \qquad 1{,}23 = \left[1 \mid 4 \mid 2 \mid 1 \mid 7\right] \quad .$$

Le frazioni continue

$$(3) \qquad \left[1\right] \; ; \; \left[1 \mid 4\right] \; ; \; \left[1 \mid 4 \; 2\right] \; ; \; \left[1 \mid 4 \mid 2 \mid 1\right]$$

vengono chiamate ***"ridotte"*** *della* ***(2)****.*

Per queste frazioni continue valgono le seguenti proprietà, che sono di facile dimostrazione ma che noi dobbiamo limitarci ad enunciare:

i) *le ridotte di posto dispari (primo, terzo, ecc.) forniscono dei valori approssimati per difetto del numero rappresentato dalla frazione continua; le ridotte di posto pari (secondo, quarto, ecc.) forniscono invece dei valori approssimati per eccesso;*

ii) *il razionale che dà ogni "ridotta" si presenta come frazione ridotta ai minimi termini; pertanto esso viene rappresentato con la massima economia di simboli.*

Queste proprietà si possono facilmente verificare sulle ridotte **(3)** *: si ha infatti la successione*

$$\begin{cases} 1 & \\ & 1 + 1/4 = 5/4 = 1{,}25 \\ 1 + 2/9 = 1{,}(2) & \\ & 1 + 3/13 = 1{,}(230769) \\ 1 + 23/100 = 1{,}23\ . & \end{cases}$$

Ovviamente, quando si abbia un numero irrazionale, la frazione continua che lo rappresenta è infinita; ma sono sempre valide le proprietà enunciate. Queste possono essere sfruttate per escogitare delle costruzioni geometriche approssimate di segmenti aventi misure irrazionali, oppure di angoli che hanno funzioni trigonometriche rappresentate da numeri irrazionali.

Per esempio, con calcoli facili si trova che la radice dell'equazione **(5)** *del* **&&8**, *che dà il coseno di* **1/7** *dell'angolo giro, può essere rappresentata dalla seguente frazione continua:*

$$(4) \qquad 0{,}6234899... = \left[0 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 9 \mid 1 \mid .....\right] \ .$$

Pertanto già la VI° ridotta fornisce il valore

$$5/8 = 0{,}625$$

che differisce dal valore cercato, per eccesso, per meno di $2X^{-3}$ *; e l'angolo avente per coseno* **5/8** *si costruisce facilmente.*

Quando si prenda in considerazione la funzione **'tangente'** *è possibile rappresentare con approssimazione grande quanto si vuole degli angoli aventi come funzioni trigonometriche dei numeri irrazionali su fogli di carta quadrettata o sul* **"geopiano"**.

Sia, per esempio, l'angolo di **60°**. *Si sa che è*

$$\tan 60° = \sqrt{3} = 1{,}7320507...$$

e l'irrazionale $\sqrt{3}$ *viene rappresentato in frazione continua nel modo seguente*

$$(5) \qquad \sqrt{3} = \left[1 \mid 1 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \mid .....\right]$$

*e già la VI° ridotta fornisce il valore **19/11** che presenta un errore per eccesso minore di* 5×10^{-5} *e permette quindi una soddisfacente rappresentazione dell'angolo sul geopiano.*

Analogamente, per quanto riguarda l'angolo al centro del pentagono regolare, si ha

$$\text{(6)} \qquad \tan 72° = 3{,}0776835.....$$

e questo numero è rappresentato in frazione continua con

$$\left[3 \mid 12 \mid 1 \mid 6 \mid 1 \mid 6 \mid 1 \mid 6 \; .....\right]$$

In questo caso basta la III° ridotta per avere il valore

$$40/13 = 3{,}076...$$

il quale fornisce una approssimazione per difetto con un errore minore di 2×10^{-3}*, errore non rilevabile in una figura tracciata su un ordinario foglio di carta quadrettata.*

Esercizi analoghi, e, in corrispondenza, delle costruzioni analoghe si possono escogitare in relazione al problema geometrico di costruire il lato del poligono regolare in funzione del raggio della circonferenza circoscritta. Ci limitiamo qui a dare lo sviluppo in frazione continua del lato del poligono regolare di 7 lati; tale frazione, nelle sue prime ridotte, è data dal doppio di:

$$\left[0 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 1 \mid 3 \mid ....\right] \quad .$$

Lasciamo al lettore di verificare per esercizio una circostanza che era già stata rilevata dal grande pittore ed incisore ***A.DURER*** *: il lato del poligono regolare di 7 lati differisce di poco dalla metà del lato del triangolo regolare inscritto nella medesima circonferenza. Anche la determinazione dell'entità della differenza e le costruzioni approssimate dei lati dei due poligoni sono lasciate qui per utile esercizio al lettore.*

B I B L I O G R A F I A

(1) - **CASSINA, Ugo.**

i) *Calcolo numerico - Bologna, 1929.*

ii) *Approssimazioni numeriche - Art.LIII in Enciclopedia delle Matematiche Elementari - Vol. III, Parte II. Milano (1950).*

(2) - **CUGIANI, Marco** - *Metodi dell'analisi numerica - Torino (1980).*

(3) - **PEANO, Giuseppe.**

i) *Approssimazioni numeriche - R. Accademia dei Lincei - Serie V, Vol. 25 (1916), pag.8 et sqq.*

ii) *Approssimazioni numeriche - Atti R. Accademia delle Sci. di Torino - Vol. 52 (1916-17).*

iii) *Valori decimali abbreviati ed arrotondati - Atti R. Accademia delle Sci. di Torino - Vol. 52 (1916-17), pag.372 et sqq.*

iiij) *Interpolazione sulle tavole numeriche - Atti R. Accademia delle Sci. di Torino - Vol. 53 (1917-18), pag.693 et sqq.*

v) *Formulario Mathematico - Editio V - Torino 1908.*

vi) *Giochi di aritmetica e problemi interessanti (G.B.Paravia edit.)*